



WORKING PAPER n.01.01

Marzo 2001

***Reti Neurali e Modelli Switching Regime per la
Valutazione di Opzioni Finanziarie***

M. Billio^{a,b}

M. Corazza^{a,b}

M. Gobbo^b

a. Università Ca' Foscari, Venice.

b. GRETA, Venice.

Reti Neuronali e Modelli *Switching Regime* per la Valutazione di Opzioni Finanziarie

Monica BILLIO

Università Ca' Foscari e GRETA, Venezia

Marco CORAZZA

Università Ca' Foscari e GRETA, Venezia

Michele GOBBO

GRETA, Venezia

Numerosi studi empirici hanno evidenziato come la formula di Black e Scholes compia sistematici errori rispetto ai valori di mercato delle opzioni. Nel presente lavoro verranno sviluppati due metodi alternativi al fine di valutare le opzioni call sull'indice azionario FTSE-100. In un primo approccio (parametrico) caratterizzeremo il processo seguito dall'attività sottostante l'opzione attraverso una mistura di distribuzioni (modelli *switching regime*). Con il secondo approccio (non parametrico) non viene, invece, effettuata alcuna ipotesi circa il comportamento dell'attività sottostante l'opzione (si utilizzeranno, in particolare, le reti neurali artificiali).

1 Introduzione

Le opzioni finanziarie sono strumenti finanziari derivati che hanno conosciuto, negli ultimi decenni, una rapida diffusione e vengono utilizzate prevalentemente a fini di copertura rispetto varie forme di rischio ed a fini speculativi. È innegabile, tuttavia, che parte dell'iniziale successo e della successiva diffusione di tali strumenti sia legato alla presenza di un modello di valutazione molto semplice ed efficiente, quale la nota formula di valutazione in forma chiusa sviluppata da Black e Scholes¹ nel 1973, formula estesa in varie direzioni da Merton nello stesso anno.

La formula derivata dagli Autori si basa su numerose ipotesi che, nella realtà, raramente sono soddisfatte. In particolare numerosi studi empirici hanno evidenziato come la distribuzione dei rendimenti logaritmici di numerose serie

¹ In seguito abbrevieremo il nome dei due autori con B-S.

finanziarie si discosti significativamente dalla distribuzione normale ipotizzata da Black e Scholes, presentando caratteristiche di leptocurtosi (le “code” della distribuzione sono spesse) e di asimmetria. In secondo luogo, il mercato in cui si opera è caratterizzato da attriti quali i costi di transazione oppure l'impossibilità di operare allo scoperto. Inoltre, le contrattazioni non avvengono con continuità.

La violazione di tutte, o alcune, le ipotesi alla base del modello di B-S porta, inevitabilmente, quest'ultimo a commettere sistematici errori se confrontato ai prezzi di mercato. La maggior parte degli studi empirici² effettuati al fine di verificare la bontà della formula di B-S concorda nell'individuare prevalentemente due tipi di struttura dell'errore, rispettivamente con riferimento al tempo mancante a scadenza ed al prezzo d'esercizio (o, più precisamente, al rapporto tra valore dell'attività sottostante e prezzo d'esercizio). In quest'ultimo caso, in particolare, se si rappresentano su di un diagramma le volatilità implicite della formula di B-S, utilizzando i valori di mercato delle opzioni, si ottengono quelli che sono noti in letteratura come effetti “*smile*”.

Nonostante gli errori commessi, la formula B-S risulta utilizzata in pratica in virtù della sua semplicità: è necessaria, infatti, la stima di un solo parametro ignoto che rappresenta la volatilità osservabile empiricamente sul mercato. Si deve sottolineare, inoltre, come gli operatori tendano a “correggere” i valori ottenuti con il modello B-S calibrando i prezzi delle opzioni, con riferimento al tempo mancante a scadenza ed al prezzo d'esercizio, al fine di replicare l'effetto “*smile*” osservato empiricamente. Si può quindi osservare come gli operatori, nell'utilizzare la formula B-S con queste modifiche per la volatilità, stiano in realtà approssimando un più complesso modello per la valutazione di opzioni a volatilità stocastica ipotizzando, di fatto, che l'attività sottostante l'opzione sia caratterizzata da un processo stocastico diverso dal moto browniano geometrico assunto da B-S. Il problema è, ovviamente, individuare il modello, e quindi il processo stocastico, che riesce a catturare meglio le caratteristiche dei prezzi di mercato.

² Rubinstein M., “Implied binomial tree” *Journal of finance* 49, 1994, pagg. 771-818.

Il primo approccio analizzato in questo lavoro ipotizza che i rendimenti dell'attività sottostante l'opzione siano caratterizzati da un modello *switching regime*, individuando, quindi, un particolare modello di valutazione a volatilità stocastica. La bontà dei risultati ottenuti per tali modelli è ovviamente legata all'abilità di catturare le caratteristiche fondamentali dei dati di mercato.

Si deve sottolineare, tuttavia, come sia più realistico pensare che l'errore compiuto dal modello di B-S sia legato alla contemporanea violazione di più ipotesi.

In molti casi, quindi, risulta preferibile un approccio alla valutazione che riduca al minimo le ipotesi di partenza e che, in particolare, non sia vincolato da particolari assunzioni "a priori" circa il comportamento dell'attività sottostante. Il secondo approccio analizzato nella valutazione di opzioni finanziarie considera, quindi, un particolare modello non parametrico, le Reti Neurali Artificiali.

Nonostante i modelli sviluppati possano essere migliorati in più direzioni, i risultati ottenuti evidenziano come entrambi gli approcci portino a dei miglioramenti rispetto al modello di Black e Scholes, che si assume come punto di riferimento. In particolare, mentre i modelli *switching regime* riescono a spiegare, pur con qualche importante limite, l'effetto "*smile*" osservato empiricamente, con le reti neurali artificiali invece si ottengono prestazioni decisamente migliori del modello di B-S. Questo risultato è indice del fatto che, in molti casi, l'applicazione di una particolare distribuzione, quale quella ipotizzata dai modelli *switching regime*, può risultare troppo restrittiva quando il modello viene applicato a dati di mercato. Le opzioni oggetto di analisi sono le opzioni *call* di tipo europeo sull'indice azionario inglese FTSE-100.

2 Le opzioni finanziarie

Le opzioni finanziarie sono strumenti derivati che danno a chi le possiede la facoltà di acquistare (*call*) o vendere (*put*) alla, o entro, la data di scadenza un certo quantitativo dell'attività sottostante ad un certo prezzo, detto

prezzo d'esercizio³. Mentre a scadenza il valore dell'opzione si ricava confrontando il prezzo del sottostante con il prezzo d'esercizio, durante la vita dell'opzione questo può essere visto come funzione del prezzo del bene sottostante S_t , del prezzo d'esercizio e del tempo mancante alla scadenza ($\tau=T-t$). Per un'opzione *call* avremo cioè:

$$[1] \quad C_t = c(S_t, X, \tau).$$

Nella teoria del prezzaggio di opzioni è di fondamentale importanza lo studio di Black e Scholes⁴. I due Autori, sulla base di determinate “condizioni ideali”, riuscirono a derivare un'espressione in forma chiusa per determinare il prezzo di una *call* europea su di un'azione. Le ipotesi del modello sono:

- l'opzione è una *call* di tipo europeo;
- il bene sottostante non paga dividendi;
- il tasso d'interesse a breve termine è noto e costante per tutta la durata dell'opzione;
- non si considerano costi di transazione;
- si può dare e prendere a prestito illimitatamente ed allo stesso tasso d'interesse a breve termine;
- si può operare allo scoperto;
- il prezzo del bene sottostante si evolve in modo continuo secondo il seguente andamento diffusivo⁵

$$[2] \quad dS = \mu S dt + \sigma S dz ,$$

dove:

S : prezzo del bene sottostante al tempo corrente,

t : tempo,

dz : è la variazione di un particolare processo di Markov, noto come processo di Wiener,

μ : rendimento istantaneo atteso del bene sottostante,

σ : scarto quadratico medio (volatilità) del rendimento istantaneo del bene sottostante.

³ Hull J.C., “Opzioni futures e altri derivati”, il sole 24 ore, 1997.

⁴ Black F. e Scholes M., “The pricing of options and corporate liabilities”, *Journal of political economy* 81, 1973, 637-659.

⁵ Il bene sottostante segue cioè un moto browniano geometrico.

Quest'ultima ipotesi sulla dinamica del prezzo dell'attività sottostante è particolarmente importante, in quanto implica che, a scadenza, il prezzo del bene sottostante segua una distribuzione di probabilità di tipo log-normale e, di conseguenza, che i rendimenti istantanei si distribuiscono normalmente con varianza costante nel tempo. Le opzioni oggetto del nostro studio considerano come bene sottostante un particolare indice rappresentativo del mercato azionario inglese: l'indice FTSE-100. Essendo un indice azionario una somma pesata di più azioni, la formula per la valutazione di tali opzioni non presenta grandi differenze rispetto alla soluzione originaria di B-S. La principale complicazione è data dal fatto che le azioni che compongono l'indice possono distribuire dei dividendi durante la vita dell'opzione, e dal fatto che la maggior parte degli indici non vengono corretti al fine di considerare questo fenomeno.

L'introduzione del tasso di dividendo⁶ comporta, per il titolo che ne prevede la distribuzione, un tasso di crescita minore rispetto ad un titolo che non distribuisce dividendi⁷. Il valore corrente del titolo va, quindi, ridotto nel modo seguente:

$$[3] \quad S_t e^{-q(T-t)}$$

dove q è il tasso continuo di dividendo (*dividend yield*).

Il valore dell'opzione *call* nel caso il titolo sottostante paghi un tasso di dividendo continuo nel tempo pari a q , parametro supposto noto e costante sarà quindi:

$$[4] \quad C_{B-S} = S_t e^{-q\tau} \Phi(d_1) - X e^{-r\tau} \Phi(d_2),$$

con

$$d_1 = \left[\log(S_t/X) + (r - q + \sigma^2/2)\tau \right] / (\sigma \sqrt{\tau}),$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}.$$

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-0,5t^2} dt$$

⁶L'introduzione dei dividendi nella formula di B-S può avvenire in due modi, a seconda che il loro pagamento sia considerato discreto, avvenga cioè a date precise, oppure continuo, secondo un determinato tasso.

⁷ Ricordiamo che i dividendi vengono distribuiti ai possessori delle azioni della società e non ai possessori delle opzioni su tali azioni. Nella valutazione bisogna quindi considerare la possibilità che durante la vita dell'opzione vengano distribuiti dividendi.

Tali risultati sono stati ottenuti per la prima volta da Merton⁸.

Gli input del modello di Black e Scholes per la valutazione di opzioni su indici azionari sono quindi:

- il prezzo del bene sottostante (nel nostro caso l'indice azionario -FTSE-100),
- il prezzo d'esercizio,
- il tempo mancante a scadenza,
- il tasso d'interesse privo di rischio utilizzato,
- il tasso di dividendo (*dividend yield*),
- la volatilità.

Le prime tre variabili si possono ricavare facilmente dalla lettura dei quotidiani finanziari⁹.

Per quanto riguarda la stima il tasso d'interesse il modello B-S ipotizza che ciascun soggetto possa dare e prendere a prestito illimitatamente al tasso privo di rischio, supposto noto e costante per la durata residua dell'opzione.

Nella realtà, il tasso d'interesse tende a variare e ad assumere, generalmente, valori diversi a seconda che si chieda o dia a prestito denaro. I dati sui tassi d'interesse utilizzati al fine di ottenere una buona stima di tale parametro sono i seguenti tassi interbancari: tasso a brevissimo termine (una settimana), tassi a 1, 3, 6, 12 mesi¹⁰. Il tasso d'interesse che si accorda con il tempo a scadenza di ciascuna opzione viene ottenuto interpolando linearmente i due tassi interbancari più vicini. Si ritiene, in questo modo, di approssimare in modo ottimale il tasso d'interesse privo di rischio secondo quanto ipotizzato da B-S.

Il tasso di dividendo (*dividend yield*) si può ricavare presso il sito internet della borsa londinese¹¹ che ne fornisce, inoltre, una serie storica. Nel nostro lavoro considereremo tale parametro costante, non solo per tutta la vita residua

⁸ **Merton, R.C.** "Theory of rational option pricing", Bell journal of economics and management science, 4, 1973, 141-183.

⁹ Si osserva che i due mercati, quello azionario e quello dei derivati, chiudono allo stesso orario (16.30), garantendo così la simultaneità nella determinazione dei prezzi di chiusura giornalieri delle opzioni e dell'indice.

¹⁰ Verrà utilizzato, in particolare, il LIBOR (London Interbank Offer Rate) sulla sterlina.

¹¹ London Stock Exchange. <http://www.londonstockexchange.com>

della singola opzione, ma anche per tutto il periodo considerato e quindi per tutte le opzioni valutate¹².

La stima della volatilità è ottenuta implicitamente dai prezzi di mercato delle opzioni. In particolare, è stata effettuata una media semplice delle volatilità implicite legate alle due opzioni i cui prezzi di esercizio sono più vicini al prezzo del bene sottostante, data una certa scadenza. L'utilizzo di una media ha lo scopo di mitigare la presenza di eventuali errori nei prezzi delle opzioni e di minimizzare l'effetto di dati "rumorosi". Nel caso in cui nello stesso giorno siano quotate opzioni con scadenze diverse, si provvederà ad effettuare un'ulteriore media semplice delle volatilità implicite ottenute con l'operazione precedente.

L'utilizzo di tale sistema di pesi per la stima della volatilità non deriva da un'analisi rigorosa dei dati oggetto di studio, ma si basa sulle seguenti osservazioni¹³:

- le opzioni at-the-money¹⁴ sono, generalmente, le più scambiate, e quindi la volatilità implicita collegata ha contenuto informativo più attendibile,
- i prezzi delle opzioni at-the-money sono più sensibili al cambiamento nella volatilità e quindi, a parità di altre condizioni, un'errata misurazione della volatilità provoca errori più consistenti per tale categoria di opzioni¹⁵.

3 Modelli switching regime: valutazione dell'opzione

I modelli *switching regime* ipotizzano che i rendimenti dell'attività sottostante l'opzione siano caratterizzati attraverso una mistura di distribuzioni normali con diversa varianza, i cui pesi sono determinati da un processo non osservabile, individuando un modello di valutazione dell'opzione a volatilità stocastica¹⁶.

¹² Si è osservato, infatti, che durante il periodo considerato il parametro non ha subito grandi oscillazioni, mantenendosi vicino al livello stimato.

¹³ **Lajbcygier P., Connor J.** "Improved option pricing using artificial neural networks and bootstrap methods" *International journal of neural system* 8, 1997, pagg. 457-471.

¹⁴ Un'opzione è detta "in-the-money" se il suo esercizio immediato genera un flusso di cassa positivo, altrimenti è detta "out-of-the-money". Nel caso in cui il prezzo d'esercizio sia pari al prezzo del bene sottostante l'opzione è detta "at-the-money".

¹⁵ Il parametro greco *theta*, dato derivata parziale del prezzo dell'opzione rispetto alla volatilità, assume valori maggiori per prezzi dell'attività sottostante vicini al prezzo di esercizio.

¹⁶ **Billio, M. and Pelizzon, L.**, "Pricing options with switching volatility" Working paper Greta 1997.

3.1 Modelli di riferimento

Assumiamo che i rendimenti della variabile finanziaria o macroeconomica che stiamo studiando si distribuisca nel modo seguente:

$$[5] \quad y_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}) \quad \text{con } s_t = 1, 2, \dots, N$$

dove s_t è una catena di Markov non osservabile ad N stadi caratterizzata dalla seguente matrice di transizione P :

$$[6] \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{N1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix},$$

L'elemento p_{ij} rappresenta la probabilità di passare allo stato j , condizionatamente al fatto di trovarsi nello stato i al tempo precedente. La i -esima colonna contiene, pertanto, le probabilità di transizione dallo stato i ad uno qualsiasi degli N stati.

Nel presente lavoro i modelli *switching regime* saranno utilizzati per studiare l'andamento dei rendimenti giornalieri di un'attività finanziaria, al fine di sviluppare un modello per la valutazione di opzioni finanziarie sull'attività stessa. Nostro obiettivo sarà, quindi, quello di individuare un modello che riesca a spiegare nel miglior modo possibile l'andamento del prezzo dell'attività stessa, catturandone le caratteristiche principali, per il quale sia possibile, tuttavia, sviluppare un efficiente modello di valutazione dell'opzione collegata.

I modelli presi in considerazione, pertanto, saranno caratterizzati da due stati ($N=2$) nei quali i rendimenti si distribuiscono normalmente con media (μ) e volatilità (σ) costanti.

Il primo modello (che indicheremo in seguito con la sigla **Smv2**) prevede che i rendimenti si distribuiscono nel modo seguente:

$$[7] \quad y_t \sim \begin{cases} N(\mu_0, \sigma_0^2) & s_t = 0 \\ N(\mu_1, \sigma_1^2) & s_t = 1 \end{cases},$$

e P matrice di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & p_{11} \end{bmatrix}$$

dove gli elementi della diagonale indicano le probabilità di rimanere, al tempo successivo, nello stesso regime del tempo attuale. I parametri di interesse sono quindi 6: $\theta = \{\mu_0, \mu_1, \sigma_0, \sigma_1, p_{00}, p_{11}\}$.

Una semplificazione di tale modello è data dal modello **Sv2**:

$$[8] \quad y_t \sim \begin{cases} N(\mu, \sigma_0^2) & s_t = 0 \\ N(\mu, \sigma_1^2) & s_t = 1 \end{cases}$$

e matrice di transizione uguale alla precedente.

I parametri da stimare sono solamente 5: $\theta = \{\mu, \sigma_0, \sigma_1, p_{00}, p_{11}\}$.

La complicazione, ai fini della valutazione di opzioni finanziarie, introdotta da questi modelli risiede nel fatto che né la distribuzione dei rendimenti attuale né quella futura sono conosciute con certezza. Da questo punto di vista, i modelli di valutazione delle opzioni basati su tale comportamento dell'attività sottostante presentano problematiche simili ai modelli a volatilità stocastica¹⁷.

Nel caso dei modelli a cambiamento di regime, infatti, la varianza condizionale non è conosciuta con certezza, in quanto legata al processo non osservabile s_t . La specificazione adottata, pur presentando il limite di ipotizzare che tutti i cambiamenti della varianza siano costituiti da "salti", risulta più "intuitiva" di altri modelli in quanto si presume che gli operatori, nell'effettuare la previsione circa l'andamento futuro della volatilità, tendano a distinguere essenzialmente tra fasi di mercato normali e fasi caratterizzate da instabilità (e quindi da alta volatilità).

I risultati ottenuti sono riepilogati nelle tabelle 1 e 2, ed evidenziano come la variabile di maggior importanza sia la

¹⁷ Per una rassegna di tali modelli si veda **Taylor, S.**, "Modeling Stochastic volatility: a review and comparative study", *Mathematical finance* 4, 1994.

varianza. Anche considerando medie diverse, il modello tende, infatti, a distinguere i due regimi prevalentemente sulla base dei valori assunti da tale parametro (distinguendo, quindi, tra periodi di volatilità bassa e alta).

3.2 Modello di valutazione discreto

Una volta determinati i parametri che caratterizzano la distribuzione dell'attività sottostante l'opzione, non resta che individuare un metodo che ci permetta di valutare le opzioni stesse. Tale operazione viene effettuata utilizzando un modello di tipo discreto, sulla base del modello binomiale sviluppato originariamente da Cox, Ross e Rubinstein¹⁸, opportunamente modificato.

L'ipotesi fondamentale alla base del modello CRR è che il prezzo del bene sottostante l'opzione segua un processo binomiale di tipo moltiplicativo, definito su intervalli discreti. Se indichiamo con S il prezzo corrente, alla fine del periodo possiamo ottenere i seguenti valori:

$$[9] \quad \begin{cases} uS & p \\ dS & 1-p \end{cases}$$

dove u e d sono i due coefficienti moltiplicativi, mentre p e $(1-p)$ sono le rispettive probabilità. Gli Autori ricavano poi il valore dell'opzione al tempo iniziale in tre passi:

1. dato il valore iniziale del bene sottostante, vengono generati, sulla base dei parametri u , d ed p , un certo numero finito di prezzi finali;
2. sulla base dei prezzi al tempo finale, vengono calcolati i payoff delle opzioni;
3. i payoff vengono scontati al tempo iniziale percorrendo a ritroso l'albero precedentemente generato.

Gli stessi Autori, ponendo opportune condizioni sui parametri, dimostrano come il processo binomiale approssimi il processo continuo che B-S ipotizzano per derivare la loro formula per la valutazione delle opzioni.

Nello sviluppare il modello di valutazione discreto nell'ipotesi che il bene sottostante sia governato da un

¹⁸ Cox, J.C., Ross S. A., and Rubinsten M., "Option pricing: a simplified approach", *Journal of Financial Economics* 7, 1979, pagg. 229-263.

modello a cambiamento di regime dovremo considerare necessariamente che:

- i rendimenti, a scadenza, non si distribuiscono più normalmente con media e varianza costanti, ma, nel caso considerato, come una mistura di distribuzioni normali,
- nel percorrere l'albero a ritroso si devono considerare le probabilità del passaggio da un regime all'altro, raccolte nella matrice di transizione P .

Prima di spiegare gli aggiustamenti apportati al fine di tenere conto di queste considerazioni, è necessaria una precisazione. Come abbiamo detto precedentemente, i modelli *switching regime* introducono un ulteriore elemento di incertezza: oltre al prezzo del bene sottostante l'opzione, si deve considerare l'incapacità di riconoscere con certezza il regime che governa la distribuzione attuale e futura dei rendimenti, e, quindi, la possibilità del passaggio da un regime all'altro.

In questo caso non è più possibile costruire il portafoglio non rischioso¹⁹ e le semplificazioni introdotte ipotizzando di operare in un ambiente neutrale al rischio non sono più giustificate. In particolare, non riuscendo a replicare esattamente il payoff dell'opzione a scadenza, una diversa ipotesi sull'atteggiamento verso il rischio degli investitori porta a prezzi dell'opzione diversi.

In questo lavoro ipotizziamo di valutare le opzioni in un ambiente neutrale al rischio. Nello sviluppo del processo discreto, quindi, la media di ciascun regime viene sostituita con il tasso d'interesse privo di rischio, eventualmente diminuito del tasso di dividendo, e, nello scontare i payoff a scadenza, verrà utilizzato il tasso privo di rischio. Nel seguito parleremo, quindi, di regimi di alta e bassa volatilità. Ricordiamo, tuttavia, che l'ipotesi di operare in un ambiente neutrale al rischio non è più un'assunzione legata ad una semplificazione dei calcoli, ma diventa una precisa assunzione del modello presentato. Per ottenere la convergenza del processo discreto al processo continuo ipotizzato, mantenendo una buona approssimazione della distribuzione

¹⁹ Nell'approccio binomiale l'utilizzo della neutralità al rischio è giustificato dalla replicabilità dell'opzione *call* con un portafoglio formato dall'attività sottostante e dai titoli non rischiosi. In questo caso il portafoglio non rischioso si può costruire solo nel caso in cui esista un'attività perfettamente correlata con la volatilità.

finale, abbiamo sviluppato un albero pentanomiale²⁰. Il valore al tempo iniziale viene ottenuto scontando i payoff ottenuti sulla base dei valori di S_T così generati percorrendo a ritroso l'albero precedentemente costruito, come indicato nella procedura utilizzata da CRR.

Al fine di considerare le possibilità di cambiamento di regime, in corrispondenza dei nodi precedenti il periodo finale, vengono calcolati due valori dell'opzione, condizionali al fatto di trovarsi nel regime di alta o bassa volatilità.

Al tempo t avremo due valori per l'opzione, uno per ciascuno dei regimi:

$$[10] \quad \begin{cases} C(t | s_t = 0) = [p_{00} \cdot C(t+1 | s_{t+1} = 0) + (1-p_{00}) \cdot C(t+1 | s_{t+1} = 1)]e^{-rdt} \\ C(t | s_t = 1) = [(1-p_{11}) \cdot C(t+1 | s_{t+1} = 0) + p_{11} \cdot C(t+1 | s_{t+1} = 1)]e^{-rdt} \end{cases}$$

Tale procedura è applicata iterativamente fino al tempo iniziale, ottenendo anche in questo caso due valori dell'opzione, condizionali al fatto di trovarsi in un periodo di alta oppure di bassa volatilità. Il valore dell'opzione dipende quindi dalla conoscenza che i soggetti hanno della fase di mercato che si sta attraversando. Una possibile soluzione è utilizzare come pesi le probabilità marginali²¹. Avremo in pratica:

$$[11] \quad C(0) = p_0 \cdot C(0 | s_0 = 0) + p_1 \cdot C(0 | s_0 = 1).$$

Sottolineiamo, tuttavia, come tale decisione sia arbitraria e possa influire in modo rilevante sul valore finale dell'opzione in quanto i valori condizionali dell'opzione possono essere molto diversi tra loro.

3.3 Risultati ottenuti

Al fine di confrontare i prezzi delle opzioni così ottenuti con i valori di mercato ed i valori ottenuti applicando la formula di B-S, calcoliamo le rispettive volatilità implicite.

²⁰ **Bollen, N.**, "A lattice for valuing options in regime-switching models" Working paper, Duke University, 1997.

²¹Le probabilità marginali indicano la probabilità di trovarsi in un certo regime a prescindere dal regime che caratterizzava il tempo precedente.

Presentiamo solo alcuni esempi che riteniamo, tuttavia, sufficientemente rappresentativi dell'insieme delle opzioni valutate.

Come si può notare, i risultati ottenuti si possono ritenere soddisfacenti solo in parte, in quanto il modello si rivela in grado di replicare l'effetto "*smile*" riscontrato empiricamente solo in modo parziale. In particolare si può notare (figura 1) come il modello tenda ad offrire delle prestazioni migliori rispetto al modello B-S, generando una struttura della volatilità implicita più coerente con quella osservata empiricamente per le opzioni in-the-money ($S/X > 1$) compiendo, invece, errori simili a quelli compiuti dal modello B-S per le altre categorie di opzioni.

Questo comportamento è, tuttavia, una conseguenza delle ipotesi effettuate inizialmente circa il comportamento dei rendimenti. Al fine di considerare una struttura della volatilità implicita quale quella riscontrata empiricamente, infatti, è necessario introdurre un'opportuna relazione tra i processi stocastici che descrivono l'andamento della volatilità e dei rendimenti, rilassando l'ipotesi di probabilità di transizione costanti. Il modello, quindi, non potendo generare una struttura della volatilità implicita inclinata negativamente si deve limitare ad assumere un comportamento coerente con quello di mercato solo con riferimento ad una categoria di opzioni (in-the-money) per poi "adagiarsi" sugli stessi valori generati dal modello B-S.

L'ultimo grafico (figura 2) evidenzia un altro aspetto rilevante dei prezzi ottenuti attraverso tale modello: la volatilità implicita del modello tende a sottostimare la volatilità implicita empirica. I valori delle opzioni di mercato tendono, cioè, ad essere superiori ai valori generati dal modello.

L'analisi di tale comportamento è particolarmente interessante. Alcuni autori²² pongono, infatti, il problema della consistenza tra i prezzi delle opzioni e le proprietà della serie storica dell'attività sottostante, con particolare riferimento alle eventuali divergenze tra volatilità storica ed implicita, evidenziando come quest'ultima tenda ad assumere valori sistematicamente maggiori. Tuttavia dobbiamo

²²Bates, D.S., "Testing options pricing models", in Statistical Methods in Finance, G.S. Maddala and C.R. Rao, eds, (Elsevier) 1996.

ricordare che, nello sviluppare il modello di valutazione, abbiamo introdotto l'ipotesi di operare in un ambiente neutrale al rischio, assumendo che il rischio legato ai cambiamenti di volatilità non sia valutato dal mercato. È tuttavia possibile che i soggetti richiedano un premio aggiuntivo per il maggior rischio sopportato legato ai cambiamenti non prevedibili della volatilità. La presenza di un premio per la volatilità può giustificare, quindi, i valori più bassi generati dal modello a cambiamento di regime rispetto ai valori di mercato.

4 Reti neurali artificiali: valutazione dell'opzione

Le reti neurali artificiali (R.N.A.) sono uno strumento matematico-statistico il cui funzionamento è ispirato al processo di apprendimento del cervello umano e possono essere viste, quindi, come sistemi di elaborazione dell'informazione.

Inizialmente le reti vennero sviluppate per studiare il funzionamento del sistema nervoso ed, in particolare, del suo componente elementare: il neurone. Tali modelli, tuttavia, risultano estremamente semplificati rispetto al loro corrispondente biologico limitandosi a replicarne la struttura generale in modo da catturarne i principi fondamentali di funzionamento. Le reti neurali artificiali mostrano cioè di riuscire ad apprendere il funzionamento di un sistema operando, per un certo tempo, parallelamente ad esso ed adattando di conseguenza la propria struttura interna.

Dal punto di vista matematico le reti neurali artificiali si possono vedere come modelli non lineari e non parametrici che ricercano relazioni tra i dati. L'interesse per questa modellistica è dovuto alla capacità di individuare relazioni funzionali non lineari per via numerica, tralasciando l'individuazione formale della relazione, e quindi, l'assunzione di ipotesi "a priori" sul comportamento delle variabili. Queste ed altre caratteristiche (quali la tolleranza al rumore e la robustezza) rendono le reti neurali artificiali un valido strumento per l'analisi dei dati finanziari.

Con riferimento al problema della valutazione di opzioni finanziarie i vantaggi di tale approccio risiedono nella non necessità di forti ipotesi a priori sul comportamento delle

variabili, lasciando che sia la rete ad inferire dai dati la dinamica dell'attività sottostante l'opzione e la relazione di questa e delle altre variabili con il valore dell'opzione. In secondo luogo, l'approccio non parametrico elimina il problema dell'errata specificazione del modello e si può adattare a cambiamenti strutturali nel processo generatore dei dati. Infine, mediante tale approccio si ottiene una formula di valutazione in forma chiusa che risulta, al pari della formula B-S, relativamente facile da trattare. Tali modelli, tuttavia, oltre a richiedere una mole di dati molto elevata per il loro apprendimento, pongono un rilevante problema di interpretabilità dei risultati ottenuti, in quanto non si riesce a determinare l'esatta relazione che lega le variabili.

Lo sviluppo di una rete neurale artificiale ai fini della valutazione di opzioni finanziarie è un problema difficile da affrontare in quanto molti sono gli elementi da prendere in considerazione che influenzano in modo significativo la prestazione finale della rete.

In particolare, le scelte da effettuare riguarderanno:

- definizione, selezione ed eventuale pre-processamento dei dati utilizzati,
- definizione dell'architettura della rete e metodologia utilizzata nella fase di addestramento e selezione della rete migliore.

L'obiettivo principale che si persegue è quello di selezionare una rete neurale che si sia rivelata in grado di apprendere la relazione eventualmente esistente tra i dati di input e quello di output che le sono stati presentati. A tal fine viene selezionato un certo numero di esempi, ritenuti sufficientemente rappresentativi del fenomeno studiato (tali esempi compongono il così detto *training set*) sottolineando, tuttavia, come l'errore che si vorrebbe minimizzare non è tanto quello legato al limitato numero di esempi utilizzati nella fase di addestramento ma, piuttosto, l'errore che la rete idealmente compie con riferimento a tutti gli esempi possibili.

Tale errore, che chiameremo errore di generalizzazione, risulta spesso impossibile da determinare, in quanto l'insieme degli esempi può essere illimitato e/o, in alcuni casi, in parte non conosciuto. Se la prestazione della rete per l'intero insieme dei dati è simile a quella nel *training set*, allora

possiamo concludere che la rete generalizza bene e possiamo quindi utilizzarla a fini applicativi.

Le implicazioni principali al fine di garantire delle buone performance della rete durante l'applicazione riguardano:

- la necessità di una stima dell'errore di generalizzazione,
- la scelta degli elementi elencati precedentemente verrà effettuata con riferimento all'errore di generalizzazione e non all'errore compiuto in relazione al *training set*.

La tipologia di rete neurale artificiale utilizzata è composta da più nodi elementari, come il cervello è composto da più neuroni, organizzati in strati (reti multistrato): uno strato di input, uno o più strati nascosti ed uno di output. L'informazione, inoltre, si propaga dallo strato di input attraverso gli strati nascosti fino allo strato di output in un solo senso (reti *feedforward*) e ciascun nodo risulta totalmente connesso con i nodi degli strati immediatamente adiacenti.

4.1 Pre-trattamento dei dati

Essendo le reti neuronali dei modelli *data-intensive*, gran parte dello sforzo per una loro ottimale costruzione deve essere dedicato alla costruzione del set di informazioni da utilizzare. In particolare le operazioni effettuate riguardano:

- la selezione di un opportuno sottoinsieme dei dati disponibili;
- l'opportuna ridefinizione dei dati di input ed output.

La prima operazione si è resa necessaria per i seguenti motivi:

- escludere, secondo opportuni criteri, gli esempi ritenuti non significativi e quindi, aventi scarso contenuto informativo,
- ridurre il *training set*, per gli elevati costi computazionali per l'addestramento della rete.

I criteri utilizzati sono stati i seguenti²³:

1. vengono escluse le opzioni eccessivamente deep-in oppure deep-out-of-the-money. Tali opzioni risultano, generalmente, scarsamente trattate;

²³ Tali criteri sono stati utilizzati anche in altri lavori analoghi. Ad esempio **Anders U. Korn O. Schimitt C.** "Improving the pricing of options: a neural network approach" *Journal of forecasting* 17,1998, 369-388.

2. vengono escluse le opzioni con scadenza inferiore a 15 giorni. Tali opzioni risultano trattate nel mercato al loro valore intrinseco ed implicano errori rispetto ai prezzi teorici;
3. vengono escluse le opzioni trattate a prezzi troppo bassi (inferiori a 100 punti base). Infatti, da un'analisi dei dati si può notare come, soprattutto per i prezzi delle opzioni più vicini allo zero, vi sia un numero elevato di opzioni trattate allo stesso valore. La rete può avere, in questi casi, delle difficoltà nell'associare ad input anche molto diversi lo stesso output²⁴.

Essendo il numero degli esempi così ottenuti eccessivo si sono scelti casualmente 2500 esempi da utilizzare nella fase di addestramento e selezione della rete; si è ritenuto, in questo modo, di garantire che l'insieme dei dati utilizzati sia sufficientemente rappresentativo del fenomeno analizzato e permetta, allo stesso tempo, lo sviluppo di modelli sufficientemente complessi.

In conclusione, possiamo individuare i seguenti insiemi di dati:

- *training set*: composto da 2000 esempi scelti casualmente dall'insieme delle opzioni trattate tra dal 04/01 al 31/10. Tali dati verranno utilizzati al fine di addestrare le reti neurali;
- *validation set*: composto da 500 esempi scelti casualmente dall'insieme delle opzioni trattate tra dal 04/01 al 31/10 una volta estratto il *training set*. Tali dati verranno utilizzati al fine di individuare il momento in cui bloccare la fase di apprendimento e nella fase di selezione della rete;
- *test set*: composto dalle opzioni trattate dal 01/11 al 24/12.

Tali dati verranno utilizzati al fine di verificare le prestazioni della rete in fase applicativa.

Le variabili che influenzano il prezzo di un'opzione, avente come attività sottostante un indice azionario, secondo il modello B-S sono sei:

$$[12] \quad C = f(S_t, X, T - t, \sigma, r, d)$$

²⁴ Tale criterio è stato anche introdotto al fine di ridurre in modo drastico il totale esempi.

Il valore di un'opzione *call* (C) è funzione del valore dell'indice (S_t), del prezzo di esercizio (X), del tempo mancante a scadenza ($T-t$), della volatilità (σ), del tasso d'interesse privo di rischio (r) e del tasso di dividendo (d). La formula B-S può essere riscritta considerando le seguenti semplificazioni:

- si utilizza come tasso d'interesse privo di rischio la differenza tra l'originario tasso d'interesse privo di rischio ed il tasso di dividendo, cioè $r-d$;
- si utilizza il rapporto tra il valore dell'indice ed il prezzo d'esercizio S_t/X , ciò al fine di determinare il rapporto tra il prezzo dell'opzione ed il prezzo d'esercizio C/X .

Gli input richiesti sono in definitiva quattro.

In particolare, l'ultima semplificazione considerata, si ottiene ipotizzando che la distribuzione del rendimento dell'attività sottostante l'opzione sia indipendente dal livello del prezzo dell'attività stessa. Secondo il teorema 9 enunciato da Merton²⁵ questo implica che la funzione $f(\cdot)$ sia omogenea di grado uno rispetto al valore dell'indice ed al prezzo d'esercizio. Poiché la formula B-S rientra in tale categoria, utilizzando tali input per la rete ipotizziamo che anche la formula di valutazione dell'opzione lo sia.

Le motivazioni alla base di tale semplificazione sono le seguenti:

1. viene utilizzato un nodo di input in meno, riducendo il numero dei parametri e quindi la complessità del problema,
2. si ritiene che questo permetta alla rete di apprendere più facilmente la struttura della volatilità implicita di mercato (il così detto effetto "*smile*" si evidenzia graficamente mettendo in relazione la volatilità implicita e, appunto, il rapporto S_t/X).

La funzione che vogliamo approssimare è, quindi:

$$[13] \quad \frac{C}{X} = f\left(\frac{S_t}{X}, T-t, \sigma_{IMP}, r-d\right)$$

²⁵ Merton, R.C. "Theory of rational option pricing", Bell journal of economics and management science, 4, 1973, 141-183.

Ciascun esempio sottoposto alla rete sarà, quindi, composto da 5 valori, di cui 4 variabili di input ed 1 relativa all'output desiderato.

4.2 Fase di apprendimento

La fase di apprendimento, con riferimento alle Reti Neurali Artificiali, consiste nell'aggiustamento dei pesi (parametri) in risposta a stimoli esterni. In particolare, nel caso dell'apprendimento supervisionato utilizzato vengono forniti alla rete un vettore di input e l'output desiderato generato dal fenomeno oggetto di studio.

L'output generato dalla rete sulla base degli input fornitale è dato da:

$$[14] \quad \frac{C_{NN}(t)}{X} = \beta_0 + \sum_{j=1}^q g \left(\gamma_{0j} + \frac{S_t}{X} \gamma_{1j} + (T-t) \gamma_{2j} + \sigma_{IMP} \gamma_{3j} + (r-d) \gamma_{4j} \right) \beta_j,$$

dove:

- q numero dei nodi nascosti;
- g funzione di trasferimento;
- β_j e $\gamma_{.,j}$ parametri.

Come misura dell'errore si assume l'errore quadratico medio e come algoritmo di apprendimento si utilizza l'algoritmo di Levenberg-Marquand, modificando, cioè, i pesi al fine di ridurre l'errore compiuto. Una volta che i pesi sono stati aggiornati, la funzione d'errore viene ricalcolata fino a che, eventualmente, i valori dei parametri non convergano verso una soluzione ottimale, individuando un punto di minimo sulla superficie d'errore.

Tale fase incide in modo rilevante sulla capacità di generalizzazione della rete. L'obiettivo principale, infatti, non è quello di minimizzare l'errore compiuto dalla rete in relazione al *training set*, garantendo perciò una coincidenza pressoché perfetta tra output generato dalla rete e output desiderato, ma quello di minimizzare l'errore che, idealmente, la rete compie sull'intero insieme dei dati riguardanti il problema affrontato (che abbiamo precedentemente chiamato errore di generalizzazione), garantendo, quindi, che il modello abbia appreso tutti gli aspetti rilevanti che caratterizzano la relazione tra i dati, non confondendola con la parte rumorosa di questi ultimi.

L'andamento di tali errori, con riferimento al numero di iterazioni effettuate, tende ad essere diverso. Mentre l'errore sul *training set* diminuisce, più o meno regolarmente, ad ogni iterazione, fino a stabilizzarsi ad un punto di minimo, l'errore di generalizzazione tende ad assumere un comportamento dapprima decrescente, fino ad un determinato livello, per poi crescere (problema dell'*overtraining*). Si pone, quindi, il problema di individuare l'iterazione, e quindi il valore dei parametri, in corrispondenza della quale arrestare la fase di apprendimento, al fine di individuare il valore dei pesi in corrispondenza del minimo dell'errore di generalizzazione.

Un metodo empirico molto utilizzato per ottenere una stima di tale errore è quello della *cross-validation*. Ad ogni iterazione viene calcolato, oltre all'errore sul *training set*, anche l'errore commesso su un insieme di esempi (*validation set*) che non sono stati usati precedentemente, ma che devono essere anch'essi rappresentativi del fenomeno analizzato. La fase di apprendimento verrà arrestata, quindi, in corrispondenza del minimo assunto dall'errore compiuto dalla rete nel *validation set*.

Nella fase applicativa, tuttavia, il problema dell'*overtraining* non è stato quasi mai riscontrato. La spiegazione di tale fenomeno può essere imputata alla selezione iniziale fatta sui dati al fine di eliminare gli esempi meno significativi, ed alle caratteristiche dei dati oggetto di studio che, in sostanza, si possono considerare poco rumorosi.

Presentiamo ora le prestazioni delle reti neurali artificiali addestrate, rispettivamente per il *training set* e per il *validation set* al fine di individuare, sulla base dell'errore commesso, la rete idonea ad essere utilizzata a fini applicativi.

Le prove sono state effettuate considerando diverse configurazioni iniziali dei pesi, come suggerito dalla letteratura.

Come si può vedere dalla tabella 3, la rete che ottiene i risultati migliori nel *validation set* è la rete caratterizzata da 8 nodi nello strato nascosto e quindi nel seguito verrà utilizzata a fini applicativi.

4.3 Risultati ottenuti

Analizziamo ora le prestazioni della rete nell'applicazione, valutando le opzioni comprese nel *test set* (periodo che va dal 1/11 al 24/12 per un totale di 530 esempi).

Come si può vedere dalla tabella 4, l'errore compiuto dal modello non parametrico risulta inferiore, non solo all'errore compiuto dal modello B-S, ma anche dell'errore compiuto dalla rete stessa nel *training set*. Questo comportamento può essere giustificato considerando che il *test set* è composto da un numero limitato di opzioni e soprattutto appartenenti a particolari categorie.

Dopo aver verificato che le prestazioni (analisi *out of sample*) sono soddisfacenti, andiamo ad analizzare il comportamento del modello non parametrico nell'insieme di dati utilizzati nella fase di sviluppo (analisi *in sample*). Al fine di verificare se le prestazioni del modello variano a seconda del valore assunto dagli input si suddividono le opzioni trattate nel periodo che va dal 04/01 al 31/10 con riferimento:

- al rapporto tra valore dell'indice ed il prezzo di esercizio, individuando cinque categorie (Tabella 5),
- al tempo mancante alla scadenza, individuando tre categorie (Tabella 6).

Nel presentare i risultati ottenuti proponiamo anche un confronto con gli errori compiuti dal modello B-S al fine di permetterne una migliore comprensione e lettura.

L'analisi dei risultati, riassunti nelle tabelle porta a due considerazioni principali:

1. le prestazioni della rete neurale artificiale nell'analisi *in the sample* sono migliori rispetto a B-S per tutte le categorie di opzioni considerate;
2. il comportamento risulta qualitativamente simile per i due modelli; l'errore tende ad aumentare all'aumentare del tempo mancante a scadenza e tende ad essere più elevato per prezzi di esercizio che si allontanano dal valore dell'indice.

Prima di commentare in modo più approfondito i risultati ottenuti, si reputa utile ricordare che la volatilità utilizzata come input dei due modelli è stata ottenuta come media delle volatilità implicite ricavate dai prezzi di mercato

delle opzioni at-the-money. Tale osservazione ci permette di osservare come il modello non parametrico riesca ad ottenere delle prestazioni migliori di B-S anche per le opzioni near-the-money, categoria di opzioni teoricamente più favorevole a B-S. La struttura della volatilità implicita di mercato, inoltre, evidenzia chiaramente una relazione inversa tra la volatilità e rapporto tra valore dell'indice e prezzo d'esercizio (S/X), a fronte della struttura costante ipotizzata dal modello di B-S che, quindi, tende inevitabilmente a generare valori inferiori al mercato per le opzioni in-the-money e superiori per le out-of-the-money. Invece, la rete neurale artificiale si è rivelata in grado di replicare la struttura osservata empiricamente, "apprendendo" gli aspetti più rilevanti della relazione che lega i dati di input all'output (Figura 4). L'analisi svolta non sembra evidenziare, con riferimento alle varie categorie di opzioni, una particolare struttura dell'errore, non essendoci una tendenza, da parte della rete, a generare valori delle opzioni sistematicamente inferiori o superiori a quelli di mercato. L'errore compiuto può essere imputato in parte a "rumore", particolarmente presente nel caso di opzioni scarsamente trattate quali, appunto, le opzioni deep-in oppure deep-out-of-the-money (Figura 3).

I risultati si possono considerare, in conclusione, soddisfacenti.

5 Conclusioni

Questo studio si proponeva di verificare come due approcci alla valutazione di opzioni finanziarie sostanzialmente diversi possano contribuire a spiegare gli errori compiuti dal classico modello sviluppato da Black e Scholes, considerato in questo lavoro il punto di riferimento al fine di commentare i risultati ottenuti.

Nel primo modello sviluppato si è rilassata l'ipotesi che l'attività sottostante l'opzione segua un andamento diffusivo del tipo moto browniano geometrico in favore di un modello a volatilità stocastica che considera il sottostante governato da un modello a cambiamento di regime. In questo modo si ipotizza che la varianza possa assumere solamente due valori a seconda che il mercato attraversi un periodo di alta volatilità oppure di volatilità normale.

I risultati ottenuti mediante tale approccio si sono rivelati soddisfacenti solo in parte. La struttura della volatilità implicita generata dal modello a volatilità stocastica, infatti, non riesce a replicare completamente lo “*smile*” osservato empiricamente, tendendo, inoltre, a sottostimare i valori di mercato delle opzioni.

Le motivazioni di tale comportamento possono essere:

- l'errore compiuto dal modello B-S può essere dovuto alla contemporanea violazione di più di una ipotesi del modello, quali la presenza di frizioni nel mercato oppure la variabilità del tasso d'interesse durante la vita dell'opzione;
- un errore nella scelta del processo generatore: il modello sviluppato non considera, infatti, la possibilità di una relazione tra il processo stocastico che descrive volatilità e sottostante. L'introduzione di tale ipotesi può, come si è visto, spiegare il comportamento osservato empiricamente;
- l'ipotesi di operare in un ambiente neutrale al rischio porta a non considerare il premio eventualmente richiesto dagli operatori per il rischio legato ai cambiamenti della volatilità. Questo si traduce in un valore dell'opzione inferiore a quello di mercato.

Nel secondo modello sviluppato utilizziamo un metodo non parametrico (reti neurali artificiali) che non è legato a nessuna ipotesi circa il comportamento dell'attività sottostante. I risultati si possono considerare soddisfacenti.

In particolare sottolineiamo come:

- nonostante siano stati utilizzati gli stessi input, e si sia utilizzata una volatilità implicita teoricamente “favorevole” a B-S, i risultati sono migliori per tutte le categorie di opzioni analizzate;
- la rete neurale si sia rivelata in grado di catturare le caratteristiche principali del fenomeno analizzato, generando una struttura della volatilità implicita molto vicina a quella osservata empiricamente.

Ricordando come sia difficile proporre un confronto tra i due modelli sviluppati in questo lavoro, e come i risultati ottenuti possano essere influenzati dal tipo di dati utilizzati e dalle caratteristiche del mercato in cui si opera, si conclude con le seguenti osservazioni, che possono essere viste anche come spunto per eventuali lavori futuri sull'argomento:

- l'approccio parametrico, soprattutto in relazione alla interpretabilità dei risultati ottenuti, si è rivelato particolarmente interessante; risultati migliori si possono ottenere considerando una opportuna relazione tra i processi stocastici che descrivono l'andamento dell'attività sottostante l'opzione e la volatilità, oppure cercando di modificare il modello ai fini di determinare un adeguato premio per il rischio legato alla volatilità;
- l'approccio non parametrico porta ad ottimi risultati. Tuttavia, essendo le reti neurali delle "scatole nere" non è chiara la relazione che lega ciascuna variabile esplicativa al valore dell'opzione e, di conseguenza, la sua significatività ai fini della valutazione; la scelta di input aggiuntivi, oppure diversi, da quelli utilizzati in questo lavoro può apportare dei miglioramenti alle prestazioni. Particolarmente promettente sembra poi il così detto "approccio ibrido", in cui la rete neurale è chiamata ad apprendere solamente le deviazioni dei prezzi di mercato rispetto ad un modello parametrico che si è dimostrato sufficientemente accurato per le opzioni considerate (quale, ad esempio, il modello B-S).

Riferimenti bibliografici

- **Anders, U. Korn, O. Schmitt, C.** "Improving the pricing of options: a neural network approach" *Journal of forecasting* 17, 1998, 369-388.
- **Bates, D.S.**, "Testing options pricing models", in *Statistical Methods in Finance*, G.S. Maddala and C.R. Rao, eds, (Elsevier) 1996.
- **Billio, M. and Pelizzon, L.**, "Pricing options with switching volatility" Working paper Greta 1997.
- **Black, F. and M. Scholes**, "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* 81, 1973, pagg. 637-659.
- **Bollen, N.**, "A lattice for valuing options in regime-switching models" Working paper, Duke University, 1997.
- **Cox, J.C., Ross S. A., and Rubinsten M.**, "Option pricing: A simplified approach", *Journal of Financial Economics* 7, 1979, pagg. 229-263.
- **Hamilton J. D.** "Time series analysis" Princeton University Press, 1994 pagg. 677-703.

- **Hertz J., Krogh A. and Palmer R.** “Introduction to the theory of neural computing” Addison-Wesley, 1991.
- **Hornik K., Stinchcombe M. and White H.** “Multilayer feedforward networks are universal approximators”, *Neural networks* 2, 1989, pagg. 359-366.
- **Hull J.C.**, “Opzioni futures e altri derivati”, il sole 24 ore, 1997.
- **Hutchinson J.M., Lo A., Poggio T.** “A nonparametric approach to pricing and hedging derivatives securities via learning networks”, *Journal of Finance* 94, 1994, pagg. 851-889.
- **Merton, R.C.**, “Theory of rational option pricing”, *Bell Journal of economics and management science* 4, 1973, pagg. 141-183.
- **Rubinstein M.**, “Implied binomial tree” *Journal of finance* 49, 1994, pagg. 771-818.
- **Sartore D.**, a cura di, “Gli strumenti derivati – Analizzare prevedere e coprire i rischi finanziari nelle imprese”, IPSOA, 1999
- **Taylor, S.** , “Modeling Stochastic volatility: a review and comparative study”, *Mathematical finance* 4, 1994.

MODELLO SV2					
	μ	σ_0	σ_1	P_{00}	P_{11}
stima	0,0005284	0,01737708	0,01050302	0,98650976	0,99614086
Std error	0,0005466	0,00133744	0,00045973	0,01322692	0,00437072
t-value	0,96670556	12,992771	22,846234	74,583472	227,91225
logverosimiglianza	1356,715		Tot. osservazioni		455

Tabella 1. Stime dei parametri del modello **Sv2**

MODELLO SMV2						
	μ_0	μ_1	σ_0	σ_1	P_{00}	P_{11}
stima	0,0000822	0,0005973	0,0173909	0,01050513	0,9860428	0,9960097
Std error	0,0016793	0,0005997	0,001385	0,00046825	0,014342	0,0046330
t-value	0,0489891	0,9959378	12,556619	22,434817	68,752115	214,97911
logverosimiglianza	1356,747		Tot. osservazioni		455	

Tabella 2. Stime dei parametri del modello **Smv2**

Tabella 3: RMSE²⁶

N. nodi nascosti	training set	validation set
2	3,796	3,680
3	1,818	1,909
4	1,597	1,736
5	1,459	1,604
6	1,440	1,604
7	1,376	1,514
8	1,341	1,451
9	1,331	1,466

Tabella 4: RMSE

	rete 8	B-S
Test set	1,155	4,242

²⁶ L'errore va considerato moltiplicato per 10^{-3} .

Tabella 5: RMSE rispetto a S/X

	Rete 8	B-S
Deep-in-the-money	1,543	7,603
In-the-money	1,404	6,46
Near-the-money	1,241	3,263
Out-of-the-money	1,445	4,595
Deep-out-of-the-money	1,531	9,169
Totale In-Sample	1,429	6,402

Tabella 6: RMSE rispetto al tempo mancante a scadenza

	Rete 8	B-S
Breve termine	1,311	3,764
Medio termine	1,415	6,56
Lungo termine	1,529	7,759
Totale In-Sample	1,429	6,402

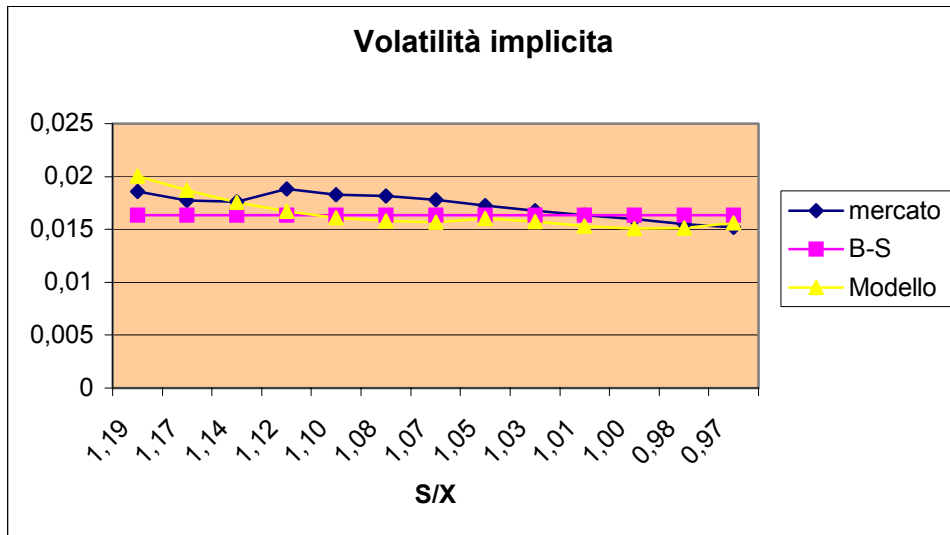


Figura 1: volatilità implicita opzioni trattate il 20/05 con scadenza 30 giorni.

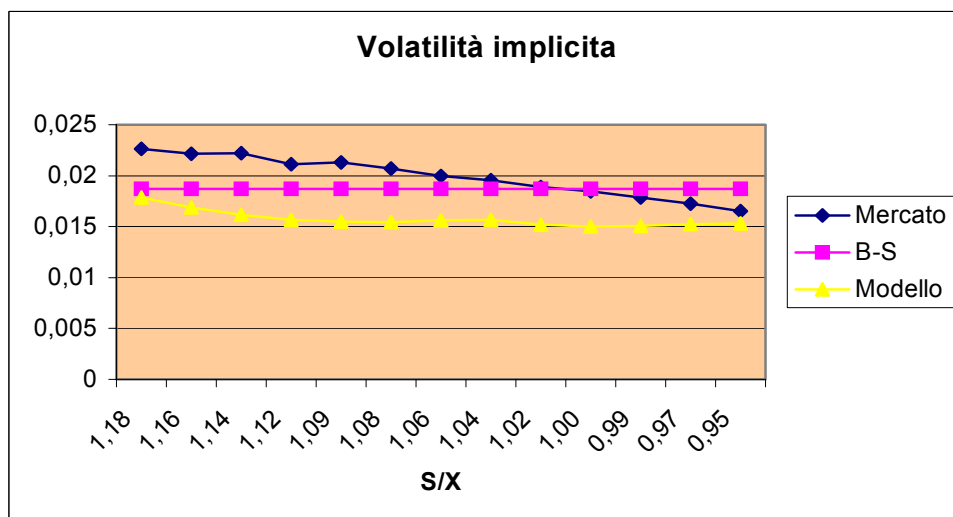


Figura 2: volatilità implicita opzioni trattate il 04/02/99 con scadenza 31 giorni.

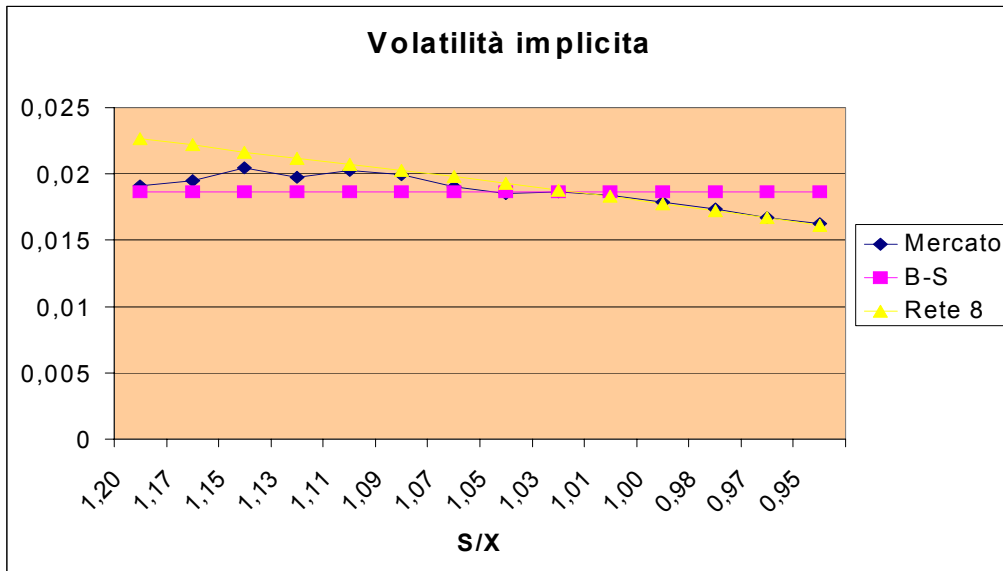


Figura 3: volatilità implicita opzioni con scadenza a 30 giorni.

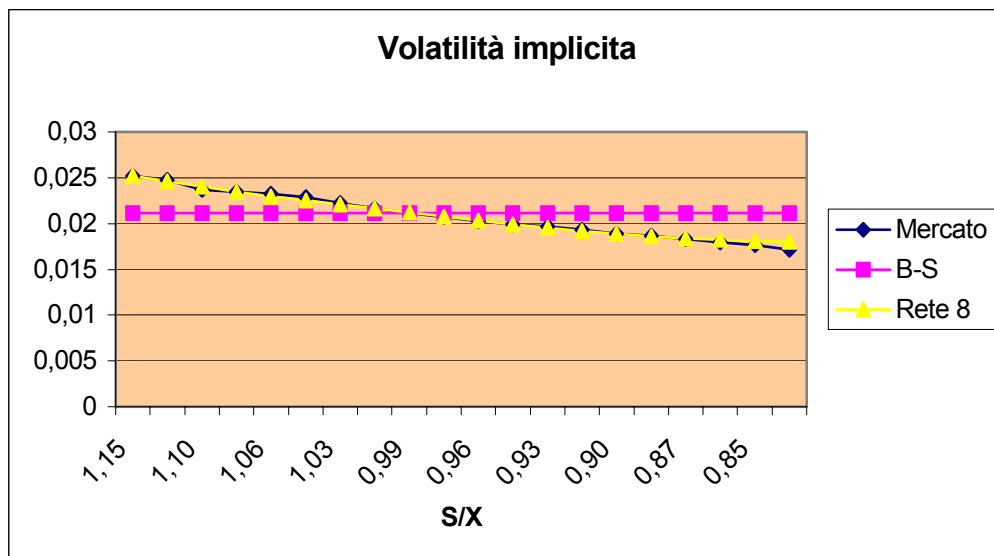


Figura 4: volatilità implicita opzioni con scadenza 120 giorni.