Opportunità di arbitraggio nel mercato del BTP Futures: una verifica empirica.

Andrea Giacomelli

Greta, Venezia

Domenico Sartore

Università Ca' Foscari e Greta, Venezia

Michele Trova

Intesa Asset Management

Come è già stato affermato nell’articolo (Cappellina), la derivazione del valore teorico di un future è basata sul principio di non arbitraggio. Ma tale ipotesi è davvero verificata nella realtà, o si presentano agli operatori opportunità di arbitraggio nei mercati di questi derivati ?

La rilevanza teorica e l’interesse operativo di tale questione sono tali da motivare approfondite indagini empiriche ; in questo articolo vengono quindi presentati i risultati di un’analisi econometrica volta a verificare la possibilità di individuare eventuali opportunità di arbitraggio nel mercato del BTP Futures quotato al LIFFE di Londra.

Dopo aver introdotto il contesto teorico a cui è stato fatto riferimento nel condurre questo studio, verranno brevemente descritti gli stumenti statistici utilizzati, per poi presentare i risultati ed i relativi commenti.

Uno schema generale per la valutazione dei contratti futures

Al fine di fornire uno schema generale di valutazione di un financial future[1], è necessario introdurre i seguenti concetti base, con relativa notazione:

1) T indica il tempo di scadenza del contratto future (data in cui dovrà avvenire la consegna materiale del sottostante);
2) t esprime l'istante attuale;
3) S_t rappresenta il prezzo spot al quale l'attività sottostante è quotata sul mercato al tempo t;
4) K_t rappresenta il prezzo di consegna concordato in t per la scadenza T;
5) f_t rappresenta il valore teorico del contratto future al tempo t;
6) FV_t rappresenta il valore di equilibrio K-equivalente per il prezzo di consegna del bene sottostante (fair value) al tempo t;
7) r_t è il tasso di interesse privo di rischio sulla scadenza (T - t), espresso su base annua al tempo t.

Al tempo t possiamo intraprendere due operazioni : a) acquistare al prezzo S_t il bene sottostante, oppure b) impiegare in un investimento privo di rischio la liquidità pari a $K_t \,/\, \left(1+r_t\right)^{(T-t)/365}$, ed acquistare un contratto future per scadenza T e prezzo di consegna K_t.

Alla scadenza T, la condizione di non arbitraggio imporrà che il valore dei due portafogli sia perfettamente coincidente (un medesimo bene non può avere valori diversi). La condizione di non arbitraggio, peraltro, deve essere verificata anche per ogni istante intermedio t compreso tra la data di sottoscrizione del contratto future, e la data di scadenza, posto che il mercato stia correttamente prezzando tanto il valore del contratto future, quanto il valore del bene sottostante.

---

[1] E' doveroso sottolineare come le considerazioni che si svilupperanno di qui a poco sono perfettamente valide solo nel caso di contratti a termine (forward), mentre nel caso dei contratti future, a causa del meccanismo dei margini (marking to market), esse rappresentano delle approssimazioni.

In altri termini, per ogni istante t si dovrà avere:

$$S_t = \frac{K_t}{(1+r_t)^{(T-t)/365}} + f_t$$

o, se preferiamo,

$$f_t = S_t - \frac{K_t}{(1+r_t)^{(T-t)/365}}$$

L'idea che il mercato aggiusti K_t in ogni istante t, in modo tale che alla scadenza del contratto f_t sia nullo, ci introduce al concetto di *fair value*, così rappresentabile sotto il profilo formale :

$$FV_t = S_t(1+r_t)^{(T-t)/365}$$

con $FV_t = K_t$.

Se così non dovesse essere, si aprirebbero delle opportunità di arbitraggio, che possiamo distinguere in due classi :

- CASO A -

Si ha che vale la seguente disuguaglianza

$$FV_t = S_t(1+r_t)^{(T-t)/365} < K_t$$

In questo caso si apre la possibilità di un arbitraggio (operazione chiusa senza rischio, almeno in linea teorica) del tipo *cash and carry*, attuato cioè acquistando a pronti tramite debito il bene sottostante al prezzo S_t e vendendo (sempre a pronti) il future con prezzo di consegna K_t.

In T il profitto dell'operazione sarà pari a :

$$K_t - S_t(1+r_t)^{(T-t)/365}$$

- CASO B -

Si ha che vale la seguente disuguaglianza

$$FV_t = S_t(1+r_t)^{(T-t)/365} > K_t$$

In questo secondo caso si apre la possibilità di un arbitraggio del tipo *reverse cash and carry*, attuato cioè vendendo a pronti allo scoperto il bene sottostante al prezzo S_t ed acquistando (sempre a pronti) il future con prezzo di consegna K_t.

In T il profitto dell'operazione sarà pari a:

$$S_t(1+r_t)^{(T-t)/365} - K_t$$

Onde poter standardizzare il contratto, l'oggetto del BTP Future è un titolo nozionale, che non necessariamente trova riscontro in un titolo effettivamente esistente. Vi è quindi la necessità di rapportare i prezzi dei titoli esistenti (e quotati sui mercati spot), e che la Clearing House individua di volta in volta come consegnabili, con il prezzo future; senza tale collegamento le operazioni di arbitraggio non potrebbero essere impostate.

Tale collegamento è ottenuto mediante il computo del cosiddetto fattore di conversione o price factor che viene definito nel modo seguente:

Definizione 2: Il price factor è quel prezzo per unità di nominale per cui il titolo reale sottostante ha un rendimento esattamente pari alla cedola del nozionale.

Siano:

i) i = cedola del nozionale (fissa per ogni istante t);

ii) c = cedola annua del titolo reale i-esimo;

iii) n+f = vita residua del titolo misurata rispetto a T (in cui n è il numero di anni interi e f la frazione di anno che intercorre tra t e la prima cedola),

si può calcolare il price factor nel modo seguente:

$$PF_i + rateo = \frac{c}{(1+i)^f} + \frac{c}{(1+i)^{1+f}} + \ldots + \frac{c+1}{(1+i)^{n+f}}$$

Al LIFFE, in particolare, si utilizza usualmente la seguente formulazione del price factor:

$$PF_i = \frac{1}{(1+i)^f}\left\{\frac{c}{i}\left[(1+i) - \frac{1}{(1+i)^n}\right] + \frac{1}{(1+i)^n}\right\} - c(1-f)$$

Il price factor, si ricorda, individua un singolo titolo ed esprime la quantità (nominale) di quel titolo equivalente alla quantità nominale del titolo nozionale.

Il future è uno strumento che, data la sua altissima leva finanziaria, risulta particolarmente adatto all'esercizio di una attività di speculazione altamente rischiosa sotto il profilo finanziario, con la conseguenza che le posizioni nette in contratti future tendono ad essere chiuse nel corso di un brevissimo intervallo di tempo (spesso poche ore all'interno della medesima giornata); di riflesso, soltanto un numero limitato di contratti future giunge a scadenza richiedendo l'effettiva consegna del bene sottostante.

Il momento della consegna, comunque, rimane (anche soltanto in termini prospettici) il momento più delicato di un contratto future. Come visto, ciascuna borsa, definisce un paniere di titoli mediante i quali il venditore di un future può soddisfare all'obbligazione di consegna che si è assunto con la vendita.

Rimane, peraltro, riconosciuta al venditore la possibilità di scegliere liberamente il titolo da consegnare effettivamente. E' evidente che, onde massimizzare il proprio profitto, o minimizzare la propria perdita, esso sceglierà il titolo meno caro. Tale problema di scelta ammette una soluzione banale, che consiste nel confrontare il valore di mercato di ciascun titolo consegnabile con il suo valore future, ottenuto moltiplicando il price factor definito nel precedente paragrafo per l'Exchange Delivery Settlement Price (EDSP), che altro non è se non il prezzo di chiusura ufficiale del future: il titolo più conveniente (cheapest to deliver) è quello che rende massima la differenza tra prezzo a pronti e prezzo di consegna.

Come si deduce da quanto sin qui detto, non necessariamente il titolo che funge da cheapest to deliver alla scadenza lo sarà stato per tutta la vita del contratto Futures. Ai fini di un'operazione di arbitraggio, può essere utile in ogni istante della vita di un contratto sapere quale sia il titolo cheapest to deliver. Per rispondere a tale quesito, è necessario introdurre il concetto di *implied repo rate*.

Definizione 3 : Si definisce implied repo rate del titolo i-esimo, il tasso che viene espresso come ritorno conseguibile attraverso una operazione di arbitraggio cash and carry. Esso è così calcolabile:

$$implied\ repo_i = \frac{K_t PF_i + C(T-t) - S_t}{S_t} \frac{365}{T-t}$$

dove la quantità $C(T-t)$ rappresenta il rateo maturato in T più le cedole maturate durante il periodo dell'operazione $(T-t)$ capitalizzate in T.

Il confronto tra gli implied repo rate di tutti i titoli consegnabili permette di definire nel modo seguente il titolo cheapest to deliver:

Definizione 4 : Si definisce cheapest to deliver il titolo che ha il più alto repo rate in una operazione di arbitraggio cash and carry.

Dopo avere introdotto il concetto di cheapest to deliver, e ricordando come tutti gli operatori di mercato abbiano accesso a tale informazione, è possibile riformulare nel modo seguente la definizione di fair value:

Definizione 5 : Si definisce *fair value* del contratto future quel prezzo di consegna espresso dal future per il quale l'implied repo rate del CTD è uguale al costo di finanziamento (dove i tassi sono riferiti al periodo di vita del contratto future). Si ha quindi

$$FV_t = \frac{S_t r_t \frac{T-t}{365} - C(T-t) + S_t}{PF_{CTD}} = \frac{S_t \left[1 + r_t \frac{T-t}{365}\right] - C(T-t)}{PF_{CTD}}$$

Alla luce di questa nuova definizione, si evidenzia come il fair value costituisca un limite superiore al prezzo di consegna espresso dal future in termini di cheapest to deliver. Infatti, se in un qualche istante t della vita del future il prezzo di consegna K_t fosse superiore a FV_t, si aprirebbero immediatamente delle opportunità di arbitraggio cash and carry (vendere il contratto future comprando contestualmente il titolo CTD attraverso un finanziamento al tasso di mercato r_t). Se K_t dovesse superare FV_t, allora il ritorno dell'operazione cash and carry sarebbe superiore al costo di finanziamento della posizione cash.

Ci si può chiedere se l'argomentazione appena proposta valga anche per l'operazione di arbitraggio reverse cash and carry e se, pertanto, il fair value costituisca anche un limite inferiore al prezzo di consegna del future : se ciò fosse, allora le forze del mercato potrebbero determinare univocamente il valore di K_t ed eliminare ogni possibiltà di arbitraggio.

A differenza di quanto delineato in precedenza, non è possibile pensare che nel mondo reale sia plausibile assumere che il tasso di interesse di finanziamento r_t sia uguale al tasso $repo_t$ alla base dell'operazione di riporto titoli che sottende all'operazione di reverse cash and carry.

L'operazione di arbitraggio reverse cash and carry si delineerebbe, infatti, nei seguenti termini :

-in t : vendita allo scoperto del CTD al prezzo spot S_t ;

impiego di un ammontare pari ad S_t per ottenere i titoli a riporto ;

acquisto di un contratto future con prezzo di consegna del nozionale in T pari a K_t .

-in T pagamento dell'ammontare dovuto come espresso dall'EDSP dietro ricezione dei titoli ;

restituzione dei titoli avuti a riporto dietro incasso del corrispettivo.

Da un punto di vista prettamente monetario, ciò implica :

$$Ricavo(\%) = \frac{S_t\, repo_t \frac{T-t}{365}}{S_t} \frac{T-t}{365} = repo$$

$$Costo(\%) = \frac{K_t PF_{CTD} + C(T-t) - S_t}{S_t} \frac{365}{T-t}$$

Come certamente si noterà considerando l'ultima espressione e quella che definisce l'$implied\ repo_i$, l'operatore si trova in una situazione esattamente simmetrica alla precedente, con la conseguenza che l'ultima espressione ora rappresenta il costo dell'operazione e non più il ricavo. Il ritorno atteso è pari al tasso $repo_t$ che, in normali condizioni di mercato, sarà inferiore a r_t. Le opportunità per l'arbitraggio reverse cash and carry si verificheranno proprio nel momento in cui il prezzo future K_t sarà sufficientemente basso da rendere il costo dell'operazione inferiore al ricavo. Se ne deduce che, se :

$$repo_t < r_t \qquad \Leftrightarrow \qquad FV_t < K_{repo}$$

dove K_{repo} è quel valore del prezzo di consegna del future che porta in equilibrio costi e ricavi dell'operazione di reverse cash and carry.

Il canale di arbitraggio che possiamo individuare nell'intervallo $\left[FV_t\,,K_{repo}\right]$ è in realtà un sottointervallo del vero intervallo di arbitraggio, in quanto il rischio di cambio del CTD, cui si espone chi esegue un reverse cash and carry, può essere rappresentato come un'opzione in possesso di chi consegna i titoli (delivery option), il cui valore va sottratto al ritorno del reverse cash and carry.

Il modello statistico

Al fine di verificare empiricamente la possibilità di prevedere il delinearsi di spazi per arbitraggi del tipo cash and carry o reverse cash and carry, è stato fatto ricorso alla classe dei modelli VAR Bayesiani. Questa metodologia consente infatti di modellizzare alcune delle caratteristiche più salienti delle variabili finanziarie (non linearità, eteroschedasticità), rivelandosi inoltre particolarmente appropriata per la previsione di serie storiche multivariate.

Per condurre lo studio sono state utilizzate le rilevazioni giornaliere dei prezzi di chiusura :

1) del BTP Future del LIFFE (con scadenza dicembre 1997 e marzo 1998);
2) del BTP 8.75% 01/07/2006;
3) del BTP 7.75% 01/11/2006;
4) del BTP 6.75% 01/02/2007;
5) del BTP 6.75% 01/07/2007;

ed inoltre le rilevazioni del fixing dei tassi sulla lira interbancaria ad un mese (data ipotetica di durata dell'investimento in future), rilevati sulla piazza di Londra e su quella di Roma:

6) LIBOR 1 mese;
7) RIBOR 1 mese;

Ne deriva quindi il seguente modello VAR:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_t\mathbf{m}_t + \sum_{s=1}^{p}\mathbf{B}_{s,t}\mathbf{y}_{t-s} + e_t \qquad \text{con} \qquad e_t \sim \mathrm{NID}_n\left(\mathbf{0},\mathbf{R}\right)$$

dove

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \text{Prezzo}_t \text{ BTP Future} \\ \text{LIBOR}_t \\ \text{RIBOR}_t \\ \text{Prezzo}_t \text{ BTP} \\ \text{Prezzo}_t \text{ BTP} \\ \text{Prezzo}_t \text{ BTP} \\ \text{Prezzo}_t \text{ BTP} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{m}_t = \begin{bmatrix} \text{Lunedì} \\ \text{Martedì} \\ \text{Mercoledì} \\ \text{Giovedì} \\ \text{Venerdì} \\ \text{Prefestivo} \end{bmatrix}$$

e $s = 1,\ldots,5$, per t=1,… 170.

Il vettore $\mathbf{m}_t$ è costituito da cinque variabili dummy (ad impulso) associate a ciascun giorno lavorativo della settimana e ad una sesta variabile dummy che assume valore 1 nel giorno antecedente una festività infrasettimanale e zero altrove. L’introduzione di tali dummy nel modello è stato suggerito da un'attenta analisi dei dati sulle osservazioni tick by tick su scala infra-day, che ha portato alle seguenti conclusioni:

1) sembra essere palese la caratterizzazione della serie del BTP Future come soggetta ad una forte stagionalità settimanale, intendendo con ciò che, su scala infragiornaliera, la serie assume andamenti tipici e ciclici il lunedì, il martedì, il mercoledì, il giovedì ed il venerdì;
2) si rileva traccia, nei dati, di un altro tipo di comportamento "classico" negli ambienti finanziari, cioè quello di chiudere le proprie posizioni, soprattutto quelle scoperte, prima di un giorno festivo infrasettimanale (oltrechè prima del fine settimana).

Infine, il numero di ritardi pari a cinque è stato scelto con l’intento di rappresentare il ciclo di stagionalità settimanale.

La dimensione del campione ammonta ad un totale di 170 osservazioni giornaliere che vanno dal 30 giugno 1997 al 26 febbraio 1998.

Risultati

Sulla base delle 15 previsioni in sample ottenute dal modello è stata esaminata la possibilità di effettuare arbitraggi secondo la metodologia sopra esposta.

Nella tabella 1 viene presentato il calcolo del Fair Value previsto per il contratto Future ; il Fair Value deve intendersi come previsto sulla base delle previsioni del prezzo spot del titolo cheapest to deliver e del tasso LIBOR ad 1 mese (circa la lunghezza massima che abbiamo assunto per verificare eventuali ipotesi di arbitraggio). Il Fair Value Repo, invece, si calcola sulla base delle previsioni del prezzo del titolo CTD e del tasso RIBOR.

L'analisi delle previsioni ottenute porta ad evidenziare in quattro casi su quindici la possibilità di condurre un arbitraggio del tipo reverse cash and carry, con titolo sottostante il cheapest to deliver, cioè il BTP 8.75% 01/07/2006, come è indicato dai calcoli nella tabella 2 nelle pagine seguenti.

L'ampiezza del canale di arbitraggio rimane, peraltro, molto esigua (dell'ordine di un millesimo di punto percentuale circa), con la conseguenza che eventuali spazi di arbitraggio potrebbero essere sconsigliati dagli eventuali costi di intermediazione a livello di singolo investitore privato. Una politica diversa potrebbe, invece, essere attuata da un istituto di credito che non risente, nelle operazioni "per la proprietà", di alcun onere accessorio incrementativo del prezzo di acquisto.

Calcolo del Fair Value previsto per il contratto Future					
Data	***Fair Value previsto***	***Valore previsto***	***Fair Value repo***	***Arbitraggio C. & C.***	***Arbitraggio R. C. & C.***
06/02/98	117.5522	117.5155	117.5533	no	si
09/02/98	117.4463	117.2745	117.4473	no	si
10/02/98	117.5251	117.4122	117.5208	no	no
11/02/98	117.2353	117.1384	117.2316	no	no
12/02/98	117.3303	117.2051	117.3294	no	no
13/02/98	117.6387	117.5181	117.6371	no	no
16/02/98	117.4355	117.3162	117.4342	no	no
17/02/98	117.7318	117.6015	117.7308	no	no
18/02/98	118.2269	118.1201	118.2251	no	no
19/02/98	118.4053	118.2523	118.4037	no	no
20/02/98	118.4092	118.3478	118.4081	no	no
23/02/98	118.341	118.2691	118.3399	no	no
24/02/98	118.7169	118.6201	118.7171	no	si
25/02/98	118.707	118.6235	118.7074	no	si
26/02/98	118.5696	118.4624	118.5686	no	no

tabella 1

Calcolo del Cheapest to deliver					
Data	**Repo rate previsto BTP 07/07**	**Repo rate previsto BTP 02/07**	**Repo rate previsto BTP 11/06**	**Repo rate previsto BTP 07/06**	**Titolo CTD previsto**
06/02/98	-0.17071	-0.09424	-0.01036	0.058407	BTP 01/07/2006
09/02/98	-0.19912	-0.11565	-0.02995	0.040532	BTP 01/07/2006
10/02/98	-0.2305	-0.13422	-0.02983	0.048093	BTP 01/07/2006
11/02/98	-0.23746	-0.13335	-0.02846	0.049463	BTP 01/07/2006
12/02/98	-0.25966	-0.14849	-0.03128	0.044148	BTP 01/07/2006
13/02/98	-0.26227	-0.15692	-0.03461	0.044079	BTP 01/07/2006
16/02/98	-0.33227	-0.19577	-0.06439	0.040979	BTP 01/07/2006
17/02/98	-0.35819	-0.21291	-0.07114	0.037587	BTP 01/07/2006
18/02/98	-0.37283	-0.21559	-0.07784	0.040682	BTP 01/07/2006
19/02/98	-0.38565	-0.22189	-0.06935	0.028879	BTP 01/07/2006
20/02/98	-0.40127	-0.2518	-0.09294	0.047852	BTP 01/07/2006
23/02/98	-0.55421	-0.34231	-0.13416	0.040026	BTP 01/07/2006
24/02/98	-0.644	-0.43208	-0.17545	0.028837	BTP 01/07/2006
25/02/98	-0.72438	-0.48114	-0.19233	0.029631	BTP 01/07/2006
26/02/98	-0.83049	-0.56854	-0.24589	0.015488	BTP 01/07/2006

tabella 2